Série 11 - Référentiels relatifs

1 Ressort sur une porte tournante

Objectif : Modéliser un mouvement relatif en rotation en coordonnées sphériques.

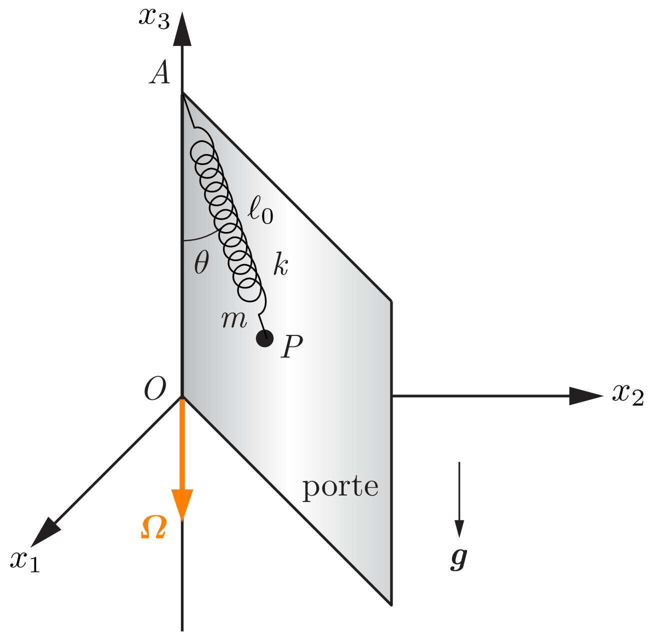
Théorie : 10.2 Référentiels accélérés ; 10.3 Mouvement relatif.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un point matériel P de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est suspendue à un point fixe A de la charnière d'une porte. L'oscillateur est astreint à se déplacer dans le plan vertical de la porte qui a un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Le frottement est négligé.

(a) Déterminer les vecteurs force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ exercés sur la masse m par rapport au référentiel relatif de la porte.

(b) Déterminer les équations du mouvement relatif du point matériel P par rapport au référentiel relatif de la porte et en déduire la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercé par la porte sur la masse m.



(c) Dans le cas particulier où l'angle d'inclinaison θ_0 de l'oscillateur est maintenu constant, déterminer la condition sur la vitesse angulaire scalaire Ω pour qu'il y ait des oscillations autour d'une coordonnée radiale d'équilibre et déterminer alors la coordonnée radiale d'équilibre r_0.

(d) Dans le cas particulier où la longueur du ressort est maintenue constante, c'est-à-dire $r = \ell$, déterminer les angles d'équilibre $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

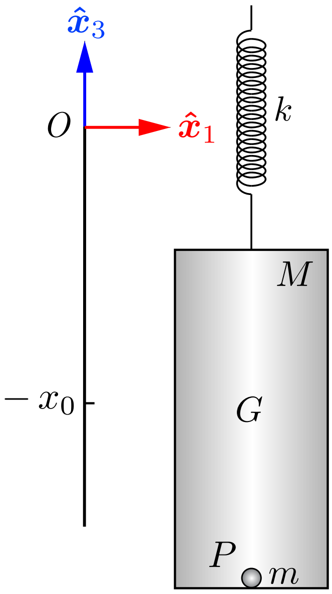
(e) Dans le cas particulier de la question précédente, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 lorsque $\Omega^2 \geqslant g/\ell$ en utilisant les développement limités en $\alpha = \theta - \theta_2 \ll 1$ autour de θ_2.

2 Boîte suspendue par un ressort

Objectif : Modéliser le mouvement relatif en translation d'un système de points matériels.

Théorie : 10.2 Référentiels accélérés ; 10.3 Mouvement relatif

Un point matériel de masse m est situé au fond d'une boîte de masse M. La masse du point matériel est négligeable par rapport à la masse de la boîte, c'est-à-dire $M \gg m$, mais la réciproque n'est pas vraie. La boîte est suspendue à un ressort de constante élastique k. La boîte est initialement tirée vers le bas d'une distance x_0 par rapport à l'extrémité du ressort à vide, qui coïncide avec l'origine O, et lâchée avec une vitesse initiale nulle.



(a) Déterminer l'équation du mouvement absolu du centre de masse G de la boîte.

(b) Déterminer l'équation du mouvement relatif de la masse m par rapport au référentiel de la boîte.

(c) Etablir la condition que doit satisfaire la masse m afin de ne pas décoller du fond de la boîte en fonction de x_0.

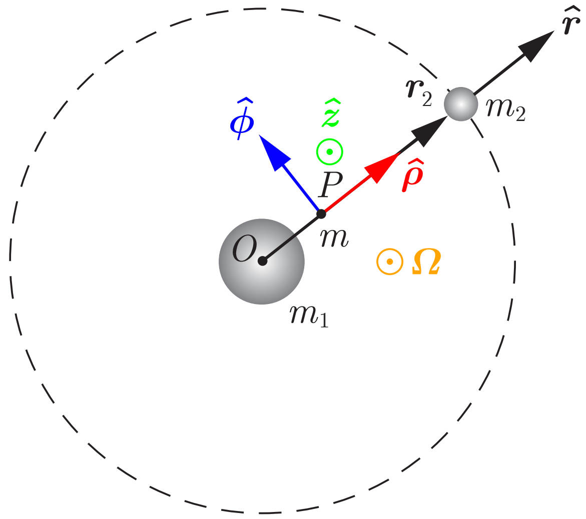
3 Etoile et exoplanète

Objectif : Modéliser un mouvement gravitationnel relatif en rotation en coordonnées polaires.

Théorie : 9.2 Loi de la gravitation universelle ; 10.2 Référentiels accélérés.

★ **Examen** : Problème d'examen.

On considère un système stellaire constitué de deux astres : une étoile de masse m_1 et une exoplanète de masse m_2. L'étoile a une masse beaucoup plus grande que l'exoplanète, c'est-à-dire $m_1 \gg m_2$. Les astres sont traités comme des points matériels et le système est considéré comme isolé car on peut négliger l'influence gravitationnelle du reste de l'univers. On prend comme origine O le centre de masse de l'étoile. L'exoplanète a un mouvement de rotation circulaire uniforme autour de l'étoile dans le plan stellaire par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$ centré à l'origine O. Ce mouvement est décrit par le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, le vecteur position de l'exoplanète est $\boldsymbol{r}_2 = r_2\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Une sonde de masse m considérée comme un point matériel P a un mouvement relatif rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. La masse m de la sonde est négligeable par rapport aux masses m_1 et m_2. Ainsi, la présence de la sonde ne modifie pas le mouvement des astres.



(a) Déterminer la vitesse angulaire scalaire Ω qui décrit la rotation uniforme de l'exoplanète autour de l'étoile.

(b) Le mouvement relatif rectiligne de la sonde est dû à son moteur qui exerce une force $\boldsymbol{F} = F\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ orthogonale au mouvement. Déterminer la norme et l'orientation des autres forces exercées sur la sonde.

(c) Déterminer l'équation du mouvement relatif de la sonde selon la ligne de coordonnée radiale de vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

(d) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre ρ_0 de la sonde entre les deux astres dans le référentiel relatif. La démarche à suivre consiste à utiliser la distance $r_0 = r_2 - \rho_0 > 0$ qui sépare la coordonnée d'équilibre et l'exoplanète, où $r_0/r_2 \ll 1$ car $m_2 \ll m_1$, puis à se servir du développement limité au premier ordre en r_0/r_2 suivant,

$$\frac{1}{(r_2 - r_0)^2} = \frac{1}{r_2^2\left(1 - \dfrac{r_0}{r_2}\right)^2} \simeq \frac{1}{r_2^2}\left(1 + 2\,\frac{r_0}{r_2}\right)$$

afin d'identifier r_0.